

## 4) Bestimmte Integrale und Flächeninhalt

Lernvideos zum Zuhören und Nachvollziehen:

<a href="https://youtu.be/1P4eCgHHaPg">https://youtu.be/1P4eCgHHaPg</a>	<a href="https://youtu.be/xHZ9vfEtHhw">https://youtu.be/xHZ9vfEtHhw</a>
<a href="https://youtu.be/NAZWlmgPWk">https://youtu.be/NAZWlmgPWk</a>	<a href="https://youtu.be/TcKANB13sTs">https://youtu.be/TcKANB13sTs</a>

### Fläche zwischen Graph und x-Achse

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von  $f$  mit der x-Achse einschließt.

#### 1. Nullstellen (Integrationsgrenzen):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 8x &= 0 \\ \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + 2x - 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 2x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x &= 8 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1^2 &= 8 + 1^2 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow x+1 &= \pm 3 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \pm 3 \\ \Leftrightarrow x = -1-3 = -4 \vee x &= -1+3 = 2 \end{aligned}$$

Nullstellen:  $-4$ ;  $0$  und  $2$

#### 2. Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2$$

#### 3. Stammfunktion an den Integrationsgrenzen:

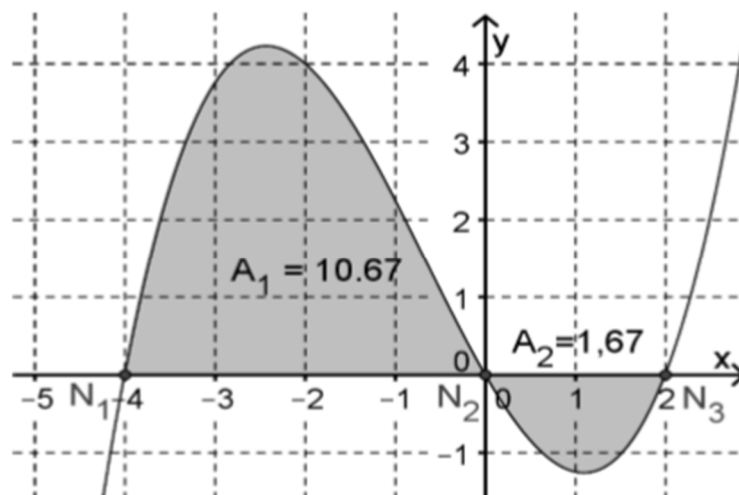
$$F(-4) = \frac{1}{16}(-4)^4 + \frac{1}{6}(-4)^3 - (-4)^2 = -10\frac{2}{3}, \quad F(0) = 0, \quad F(2) = \frac{1}{16} \cdot 2^4 + \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2^2 = -1\frac{2}{3}$$

#### 4. Flächenberechnung:

$$\int_{-4}^0 f(x) dx = F(0) - F(-4) = 0 - \left(-10\frac{2}{3}\right) = 10\frac{2}{3} = A_1 \quad (A_1 \text{ liegt oberhalb der x-Achse.})$$

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = -1\frac{2}{3} - 0 = -1\frac{2}{3} = -A_2 \Rightarrow A_2 = 1\frac{2}{3} \quad (A_2 \text{ liegt unterhalb der x-Achse.})$$

$$A = A_1 + A_2 = 10\frac{2}{3} + 1\frac{2}{3} = 12\frac{1}{3}$$



**Aufgabe 1:** Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse über dem Intervall  $[a;b]$ . Skizziere zunächst das Schaubild von  $f$ .

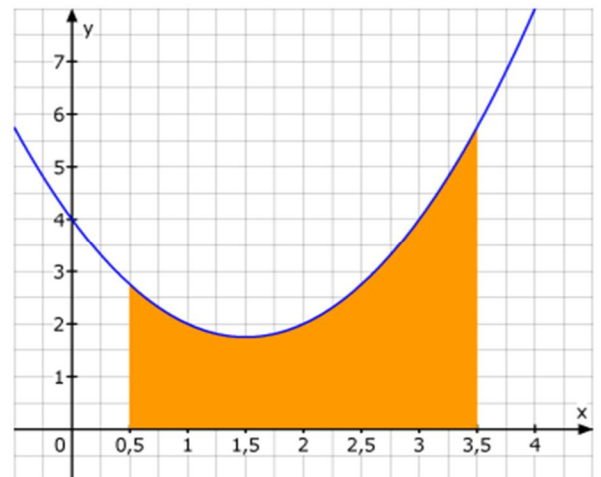
- a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ;  $[-1; 2]$                       b)  $f(x) = -x^2$ ;  $[0; 2]$
- c)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ ;  $[-3; 3]$

**Aufgabe 2:** Gegeben ist die Funktion  
 $f(x) = x^2 - 3x + 4$

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der  $x$ -Achse im Bereich von  $x = 0,5$  und  $x = 3,5$ .

Bestimmen Sie die 1., 2. und 3. Ableitung der folgenden Funktion.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + 2x$$

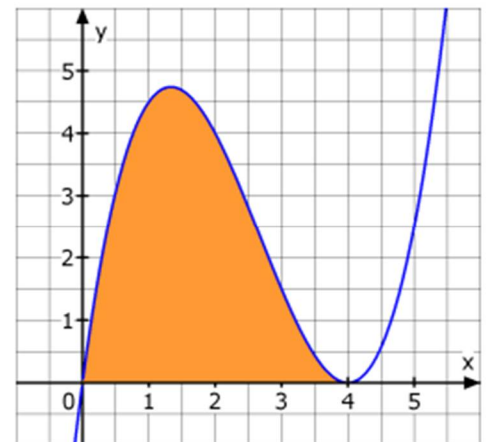


**Aufgabe 3:** Gegeben ist die Funktion  
 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$ .

mit den Nullstellen  $x = 0$ ,  $x = 4$ .

Berechnen Sie die Fläche unter der Kurve von  $x_1 = 0$  bis  $x_2 = 4$ .

Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktion  $f(x)$ . bis eine Konstante übrig bleibt.



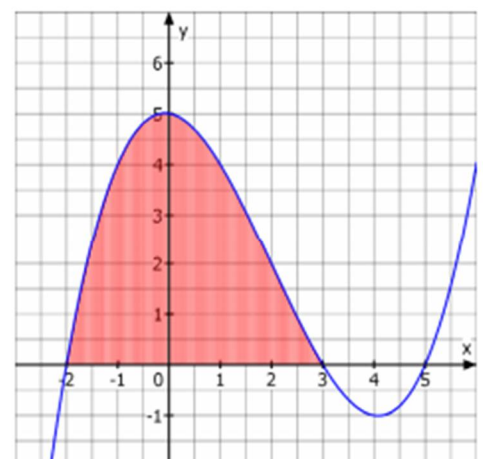
**Aufgabe 4:** Gegeben ist die Funktion  
 $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 - \frac{1}{6}x + 5$

mit den Nullstellen  $x = -2$ ,  $x = 3$ ,  $x = 5$ .

Berechnen Sie die farbige Fläche unter dem Graphen zwischen den Nullstellen  $x = -2$  und  $x = 3$ .

Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion  $f(x)$ .

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 - \frac{1}{6}x + 5$$



## Aufgabe 5:

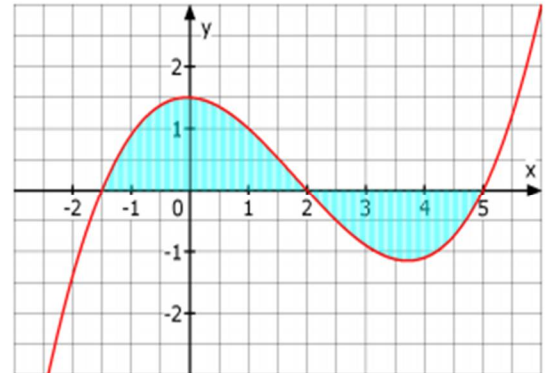
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{11}{20}x^2 - \frac{1}{20}x + 1,5$$

mit den Nullstellen  $x = -1,5$ ,  $x = 2$ ,  $x = 5$ .

Bestimmen Sie die 1., 2. und 3. Ableitung der Funktion  $f(x)$ .

Berechnen Sie die Fläche  $A$  unter bzw. über dem Graphen zur  $x$ -Achse im Intervall  $[-1,5; 5]$



## Aufgabe 6:

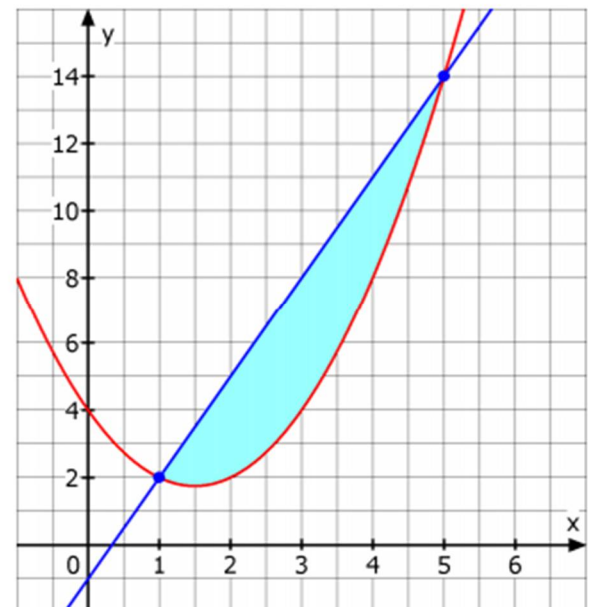
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ und}$$

$$g(x) = 3x - 1$$

Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen.

Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Graphen innerhalb der Schnittpunkte.



## Aufgabe 7:

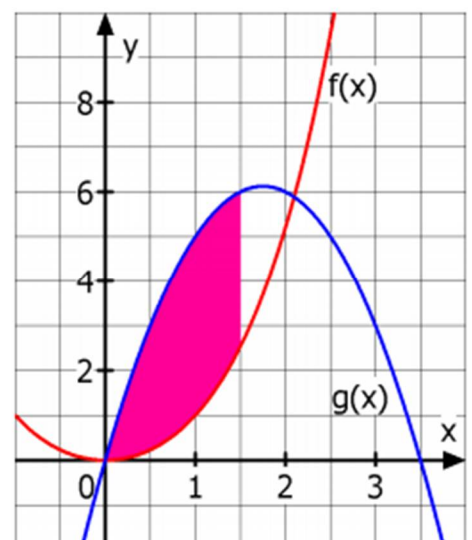
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = 0,1x^4 + 0,9x^2 \text{ und}$$

$$g(x) = -2x^2 + 7x$$

Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Graphen im Intervall  $[0; 1,5]$

Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion  $f(x)$ .



### Aufgabe 8:

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die

Nullstelle(n),

Extrempunkt(e),

Wendestelle(n)

sowie die Fläche, die beide Funktionen gemeinsam einschließen für

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 + 3x$$

### Aufgabe 9:

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ .

Ermitteln Sie:

- ◆ den Schnittpunkt mit der y - Achse,
- ◆ die Nullstellen (finden Sie die 1. NST durch probieren),
- ◆ Maxima bzw. Minima sofern vorhanden,
- ◆ Wendestellen,
- ◆ die Steigung an der (den) Wendestelle(n),
- ◆ die Fläche, die der Graph und die x - Achse einschließen.