Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Selbsteinschätzung**	Datum:

Dieses Modul ermöglicht dir, alle wichtigen Aspekte der Untersuchung ganzrationaler Funktionen, für die man keine Ableitung benötigt, zu wiederholen und intensiv zu üben. Bevor du anfängst zu üben, solltest du eine spontane Selbsteinschätzung in Form einer Schulnote von 1 bis 6 ab (erste Spalte in der Tab.). Anschließend kannst du in deinem Lerntagebuch die Testaufgaben bearbeiten und mithilfe der ausführlichen Musterlösungen auswerten. So erkennst du deine Stärken und Schwächen und kannst gezielt die Standard- und die vertiefenden Aufgaben zu diesem Modul üben.

Selbsteinschätzung

	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Testaufgaben	SE nach Bearbeitung des Moduls
1. Ich kann Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = ax^n$ ohne Wertetabelle skizzieren und die Graphen von Potenzfunktionen den zugehörigen Funktionsgleichungen zuordnen.			
2. Ich kann fehlende Koordinaten von Punkten des Graphen einer Potenzfunktion mithilfe ihrer Funktionsgleichung bestimmen.			
3. Ich kann zu zwei gegebenen Punkten die Funktionsgleichung der Potenzfunktion des Typs $f(x) = ax^n$ bestimmen.			
4. Ich kann zu einer gegebenen ganzrationalen Funktion f das Verhalten für x gegen unendlich bzw. x gegen minus unendlich bestimmen.			
5. Ich kann am Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion f bestimmen, ob ihr Graph achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.			
6. Ich kann die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion durch Ausklammern und Ablesen bestimmen, falls sich der Funktionsterm als Produkt darstellen lässt.			
7. Ich kann quadratische Gleichungen mithilfe der pq-Formel lösen.			
8. Ich kann die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion durch Substitution bestimmen, falls der Funktionsterm in der Form $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ vorliegt.			
9. Ich kann zu einer Funktion g, die durch Verschiebung und Streckung aus einer bekannten Funktion f hervorgeht, den zugehörigen Graphen skizzieren bzw. die zugehörige Funktionsgleichung finden.			

Viel Erfolg

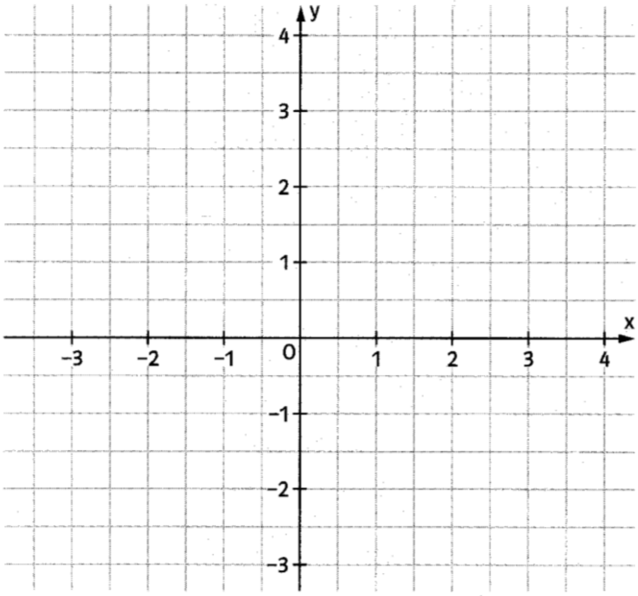
Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Testaufgaben**	Datum:

Die Aufgaben 1 – 9 beziehen sich auf die Punkte 1 – 9 der Selbsteinschätzung. Bearbeite die Aufgaben und kontrolliere dann deine Lösung mithilfe der Musterlösungen auf den folgenden Seiten.

1 a) Skizziere die Graphen der folgenden Potenzfunktionen in das untere Koordinatensystem.

(I) $f(x) = x^3$ (II) $f(x) = -x^4$

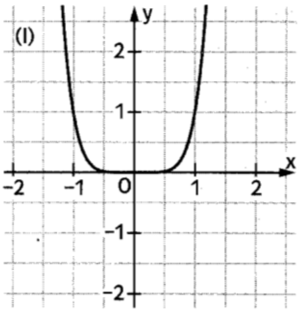
(III) $f(x) = -2x^5$ (IV) $f(x) = 0{,}5x^6$

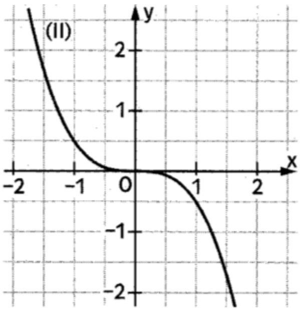


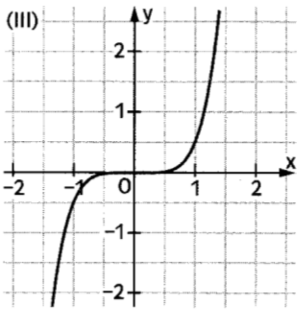
b) Ordne jedem Graphen eine passende Gleichung zu.

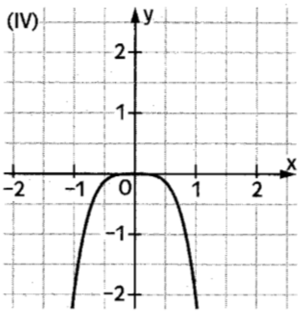
(1) $f(x) = 2x^4$ (2) $f(x) = x^6$ (3) $f(x) = -0{,}5x^3$

(4) $f(x) = -2x^4$ (5) $f(x) = -x^7$ (6) $f(x) = 0{,}5x^5$









2 Berechne die fehlenden Koordinaten der Punkte des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 5x^4$.

a) $A(2\,|\,y)$; y = ________ b) $A(x\,|\,405)$; x_1 = ______; x_2 = ______

3 Bestimme zu den gegebenen Punkten A und B die Gleichung der zugehörigen Potenzfunktion.

$A(1\,|\,-2)$; $B\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{4}\right)$ f(x) = ________________

4 Bestimme das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = 3x^7 - 4x^4 + 5$ b) $f(x) = 0{,}25x^5 - 8x^6 - x$

a) $x \to +\infty$, $f(x) \to$ ______; $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ______

b) $x \to +\infty$, $f(x) \to$ ______; $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ______

5 Untersuche die Symmetrieeigenschaften des Graphen der Funktion f.

a) $f(x) = -x^{10} + 0{,}6x^8 + 10$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^5 + 2x - 7$

a) ____________________ b) ____________________

6 Bestimme die Nullstellen der Funktion f durch Ablesen bzw. durch Ausklammern.

a) $f(x) = x(x-4)(2x+8)$ b) $f(x) = 12x - 3x^3$

a) ____________________ b) ____________________

7 Löse die quadratische Gleichung.

$3 - 5x = -x + 4x^2$ x_1 = ______; x_2 = ______

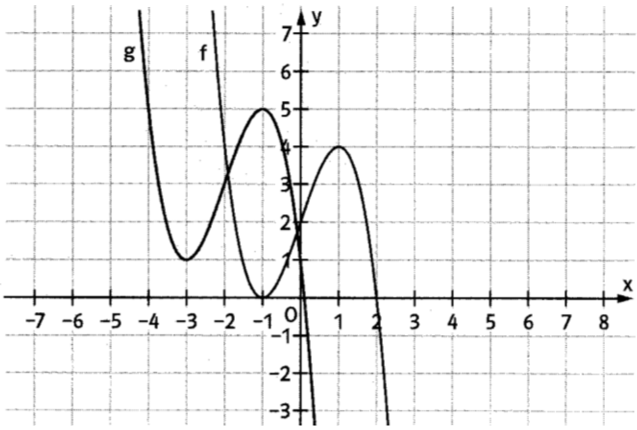
8 Bestimme die Nullstellen von f mithilfe einer Substitution.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ N = {________________}

9 Der Graph und die Gleichung der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ sind gegeben. Bestimme die Gleichung der verschobenen Funktion g und skizziere den Graphen von h mit $h(x) = -(x-1)^3 + 3(x-1) - 1$.

g(x) = ________________________________

Graphen von f, g und h:



Viel Erfolg

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Lösungen**	Datum:

Kontrolliere mithilfe der folgenden Musterlösungen deine Lösungen der Testaufgaben. Führe dann eine erneute Selbsteinschätzung der wichtigsten Kompetenzen im Bereich Eigenschaften ganzrationaler Funktionen durch.

1 Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen

a) Will man Potenzfunktionen ohne Wertetabelle skizzieren, muss man die generellen Verläufe der verschiedenen Typen von Potenzfunktionen kennen:

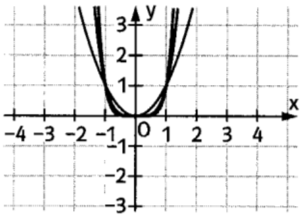
Potenzfunktion

Exponent

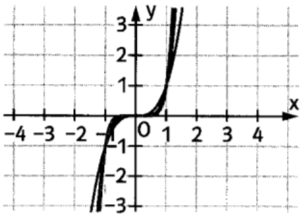
$f(x) = a\,x^n$

Vorfaktor

Potenzfunktionen mit geraden Exponenten

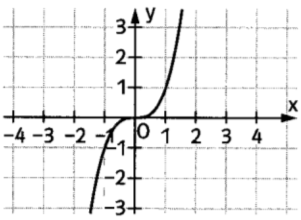


Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten



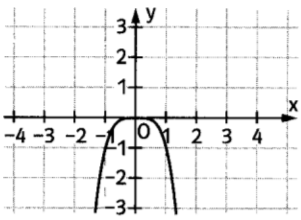
(I) $f(x) = x^3$
Der Graph verläuft wie alle Graphen mit ungeraden Exponenten und dem Vorfaktor 1 durch die Punkte $(-1\,|\,-1)$, $(0\,|\,0)$, $(1\,|\,1)$ und zusätzlich durch den Punkt $(1{,}5\,|\,3{,}375)$.

Graph zu (I)



(II) $f(x) = -x^4$
Wegen des negativen Vorfaktors wird der Graph von g mit $g(x) = x^4$ an der x-Achse gespiegelt.

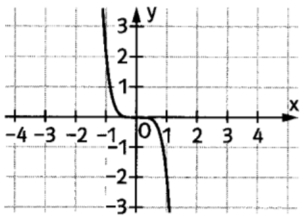
Graph zu (II)



Graphen skizzieren
1. Exponent und Vorfaktor anschauen und dem entsprechenden Typ zuordnen.
2. Vorfaktor anschauen und ggf. den Punkt (1 | y) eintragen.
3. Einen weiteren Punkt z.B. (2 | y) im Kopf bestimmen, ins Koordinatensystem eintragen und Graphen skizzieren.

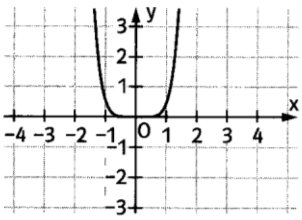
(III) $f(x) = -2x^5$
Wegen des negativen Vorfaktors wird der Graph von g mit $g(x) = x^5$ an der x-Achse gespiegelt und mit dem Faktor 2 gestreckt, d.h., der Graph der Funktion f mit $f(x) = -2x^5$ geht durch den Punkt $(1\,|\,-2)$.

Graph zu (III)

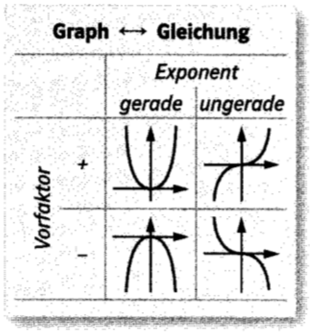


(IV) $f(x) = 0{,}5x^6$
Der Graph von g mit $g(x) = x^6$ wird mit dem Faktor 0,5 gestaucht, d.h., der Graph der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^6$ geht durch den Punkt $(1\,|\,0{,}5)$.

Graph zu (IV)



Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Lösungen**	Datum:



b) Graph I gehört zu einer Potenzfunktion mit geradem Exponenten und positivem Vorfaktor, also kommen nur Gleichung (1) und Gleichung (2) infrage. Da der Graph durch den Punkt (1 | 1) geht, wird der Graph I der Gleichung (2) zugeordnet.

Graph II gehört zu einer Potenzfunktion mit ungeradem Exponenten und negativem Vorfaktor, also kommen nur Gleichung (3) und Gleichung (5) infrage. Da der Graph durch den Punkt (1 | −0,5) geht, wird der Graph II der Gleichung (3) zugeordnet.

Graph III gehört zu einer Potenzfunktion mit ungeradem Exponenten und positivem Vorfaktor, also kommt nur die Gleichung (6) infrage. Der Graph geht durch den Punkt (1 | 0,5), was ebenfalls für diese Zuordnung spricht.

Graph IV gehört zu einer Potenzfunktion mit geradem Exponenten und negativem Vorfaktor, also kommt nur die Gleichung (4) infrage. Der Graph geht durch den Punkt (1 | −2), was ebenfalls für diese Zuordnung spricht.

2 Berechnung von Punkten von Potenzfunktionen

a) Der x-Wert des Punktes A ist gegeben. Dieser Wert x = 2 wird in die Funktionsgleichung von f eingesetzt:
$f(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$.
Also ist der Punkt A(2 | 80) ein Punkt des Graphen von f.

b) Der y-Wert des Punktes A ist gegeben. Dieser Wert y = 405 wird in die Gleichung $y = 5x^4$ eingesetzt:

$$405 = 5 \cdot x^4 \quad | :5$$
$$81 = x^4 \quad | (\ldots)^{\frac{1}{4}}$$
$$3 = x \text{ oder } -3 = x$$

Also sind die Punkte A(3 | 405) und B(−3 | 405) Punkte des Graphen von f.

Koordinaten berechnen
1. Gegebene Koordinate in die Gleichung
$y = ax^n$
einsetzen.
2. Gleichung nach der unbekannten Variable auflösen (ggf. Wurzelziehen).

3 Funktionsgleichungen von Potenzfunktionen bestimmen

Die allgemeine Funktionsgleichung einer Potenzfunktion lautet $f(x) = a x^n$.
Die Punkte A und B werden nun in die allgemeine Funktionsgleichung eingesetzt:

A(1 | −2) einsetzen: $-2 = a \cdot 1^n = a$, also $a = -2$.

$B\left(\frac{1}{2} \middle| -\frac{1}{4}\right)$ einsetzen: $-\frac{1}{4} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad |:(-2)$

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Da $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, muss n = 3 gelten.

Oder man verwendet den Logarithmus: $\lg\left(\frac{1}{8}\right) = n \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right) \quad |:\lg\left(\frac{1}{2}\right)$

$$n = \frac{\lg\left(\frac{1}{8}\right)}{\lg\left(\frac{1}{2}\right)} = 3$$

Damit erhält man: $f(x) = -2x^3$.

Funktionsgleichung bestimmen
1. Falls gegeben, Punkt (1 | y) einsetzen, um a zu erhalten.
2. Um n zu erhalten, Exponentenvergleich oder Logarithmus anwenden.

4 Verhalten von ganzrationalen Funktionen für $x \to \pm\infty$

a) $f(x) = 3x^7 - 4x^4 + 5$
Für das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ ist nur der Summand mit dem größten Exponenten entscheidend. Das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ wird also durch den Summanden $3x^7$ bestimmt. Dieser Summand strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$, also verhält sich f ebenso:
$f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$
$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

b) $f(x) = 0{,}25x^5 - 8x^6 - x$
Für das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ ist nur der Summand mit dem größten Exponenten entscheidend. Das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ wird also durch den Summanden $-8x^6$ bestimmt. Dieser Summand strebt für $x \to +\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$, also verhält sich f ebenso:
$f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$
$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

Beachte:
Für das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ ist nur der Summand mit dem größten Exponenten entscheidend.

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Lösungen**	Datum:

5 Symmetrieeigenschaften des Graphen einer ganzrationalen Funktion

Um die Symmetrieeigenschaften des Graphen einer ganzrationalen Funktion zu bestimmen, reicht es aus, sich die Exponenten der einzelnen Summanden anzuschauen.
Sind alle Exponenten gerade (wobei der Exponent „0" ebenfalls zu den „geraden" Zahlen zählt), ist der Graph der Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.
Sind alle Exponenten ungerade, ist der Graph der Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.
a) Wegen $f(x) = -x^{10} + 0{,}6x^8 + 10 = -x^{10} + 0{,}6x^8 + 10x^0$ (denn $x^0 = 1$) besitzt der Funktionsterm von f nur gerade Exponenten (10, 8 und 0).
Der Graph von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.
b) Wegen $f(x) = \frac{1}{3}x^5 + 2x - 7 = \frac{1}{3}x^5 + 2x^1 - 7x^0$ (denn $x^1 = x$) besitzt der Funktionsterm von f die ungeraden Exponenten 5 und 1 und den geraden Exponenten 0.
Der Graph von f ist also weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

Alle Exponenten gerade
⟹ ***achsensymmetrisch zur y-Achse***

Alle Exponenten ungerade
⟹ ***punktsymmetrisch zum Ursprung***

Beachte:
$x^0 = 1$
$x^1 = x$

6 Nullstellen durch Ausklammern und Ablesen bestimmen

a) $f(x) = x(x-4)(2x+8)$
Da der Funktionsterm von f bereits in Faktoren, die linear sind, zerlegt ist, können die Nullstellen von f direkt abgelesen werden.
Man muss die x-Werte so bestimmen, dass jeweils einer der drei Faktoren null wird.
Die Nullstellen sind also 0, 4 und −4.

b) $f(x) = 12x - 3x^3$
Die Nullstellen lassen sich nicht direkt ablesen. Zunächst einmal wird ein „größtmöglicher" Term ausgeklammert. Das ist der Term $3x$, da er sowohl Teiler des ersten Summanden als auch des zweiten Summanden ist.
$f(x) = 12x - 3x^3 = 3x(4 - x^2)$
Der zweite Faktor kann mit der 3. binomischen Formel umgeformt werden:
$f(x) = 3x(4 - x^2) = 3x(2 + x)(2 - x)$.
Die Nullstellen von f sind also 0, −2 und 2.
Alternativ kann man auch die Gleichung $4 - x^2 = 0$ lösen.

Nullstellen durch Ablesen
f mit
$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$
besitzt die Nullstellen a, b und c.

7 Quadratische Gleichungen mithilfe der pq-Formel lösen

Die quadratische Gleichung muss zunächst in die Form $x^2 + px + q = 0$ gebracht werden, damit anschließend die pq-Formel angewandt werden kann.

$$3 - 5x = -x + 4x^2 \quad | +5x - 3$$
$$0 = 4x^2 + 4x - 3 \quad | :4$$
$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0;\ p = 1 \text{ und } q = -\frac{3}{4}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm 1$$
$$x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{3}{2}$$

Quadratische Gleichungen lösen
1. Gleichung in die Form $x^2 + px + q = 0$ bringen.
2. p und q ablesen und in pq-Formel einsetzen:
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.
3. Ergebnisse berechnen.

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Lösungen**	Datum:

8 Nullstellen mithilfe von Substitution bestimmen

Die Funktionsgleichung der Funktion f ist in der Form $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ gegeben. Die Nullstellen lassen sich mithilfe der Substitution $x^2 = z$ und anschließender Anwendung der pq-Formel bestimmen.
Um die Nullstellen von f zu bestimmen, muss die Gleichung
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2 = 0$ gelöst werden.
Nach der Substitution $x^2 = z$ ergibt sich:

$$\frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{2}z + 2 = 0 \qquad | \cdot 4$$
$$z^2 - 6z + 8 = 0 \qquad p = -6 \text{ und } q = 8$$
$$z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8}$$
$$z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{1} = 3 \pm 1$$
$$z_1 = 2;\ z_2 = 4$$

Jetzt muss die Substitution wieder rückgängig gemacht werden, also das z wieder durch x^2 ersetzt werden, um dann die x-Werte zu bestimmen, die die Ausgangsgleichung erfüllen.
Es ergibt sich:

$x^2 = 2$	oder	$x^2 = 4$	| Wurzelziehen
$x_1 = \sqrt{2}$;	$x_2 = -\sqrt{2}$;	$x_3 = 2$;	$x_4 = -2$

Die Funktion f besitzt also vier Nullstellen, nämlich -2, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ und 2.

> ***Nullstellen mithilfe der Substitution $z = x^2$ berechnen***
> *1. Gleichung besitzt die Form $0 = ax^4 + bx^2 + c$.*
> *2. Substitution $z = x^2$ durchführen.*
> *3. Lösungen für z mit der pq-Formel berechnen.*
> *4. Substitution rückgängig machen, d.h., z durch x^2 ersetzen.*
> *5. Lösungen für x, falls möglich, durch Wurzelziehen berechnen.*

9 Zuordnung Graph ⟷ Gleichung einer ganzrationalen Funktion

Funktionsgleichung von g:
Wird der Graph der Funktion f um zwei Einheiten nach links und um eine Einheit nach oben verschoben, erhält man offensichtlich den Graphen der Funktion g.
Die Verschiebung um eine Einheit nach oben bewirkt in der Funktionsgleichung den zusätzlichen Summanden +1, wohingegen die Verschiebung um zwei Einheiten nach links für die Funktionsgleichung bedeutet, dass anstelle des Arguments x das Argument (x + 2) steht.
Es ergibt sich also die Funktionsgleichung

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+2) + 1 \\ &= -(x+2)^3 + 3(x+2) + 2 + 1 \\ &= -(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 3x + 6 + 3 \\ &= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 3x + 9 \\ &= -x^3 - 6x^2 - 9x + 1 \end{aligned}$$

> ***Zusammenhang von Graph und Gleichung***
> *$g(x) = f(x - d) + e$*
> *⟹ Der Graph von g entsteht durch das Verschieben des Graphen von f um d Einheiten in x-Richtung und um e Einheiten in y-Richtung.*

Graph von h:
Der Funktionsgleichung von h kann man entnehmen, dass der Graph von h durch Verschiebung des Graphen von f um eine Einheit nach rechts und um drei Einheiten nach unten entsteht, denn das Argument der Funktion h ist „x − 1“ statt nur „x“ und zudem ist +2 − 3 = −1.