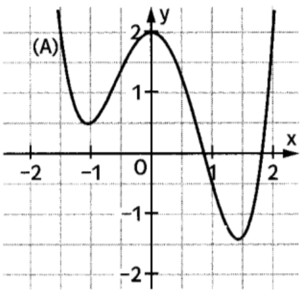
Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

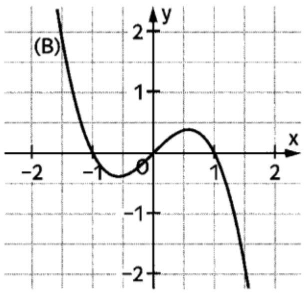
Vertiefende Aufgaben entsprechen nicht dem Muster der Test- und Standardaufgaben, sie erfordern meist einen neuen Lösungsansatz.

1 Gegeben sind vier Graphen und acht Funktionsgleichungen. Ordne jedem Graphen eine Funktionsgleichung zu und skizziere die Graphen der übrig gebliebenen vier Funktionen in das rechte Koordinatensystem.

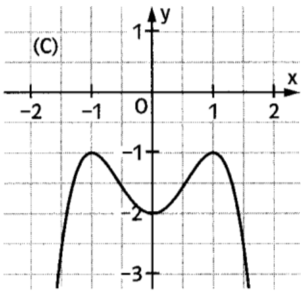
(1) $f(x) = x^3 - x$ (2) $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$
(3) $f(x) = x^3 - x + 2$ (4) $f(x) = -x^3 + x$
(5) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ (6) $f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 + 4$
(7) $f(x) = -(x-1)^3 + 4$ (8) $f(x) = x^4 - 0,5x^3 - 3x^2 + 2$



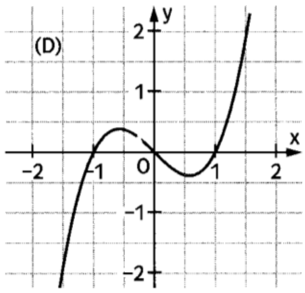
Graph A → __________



Graph B → __________

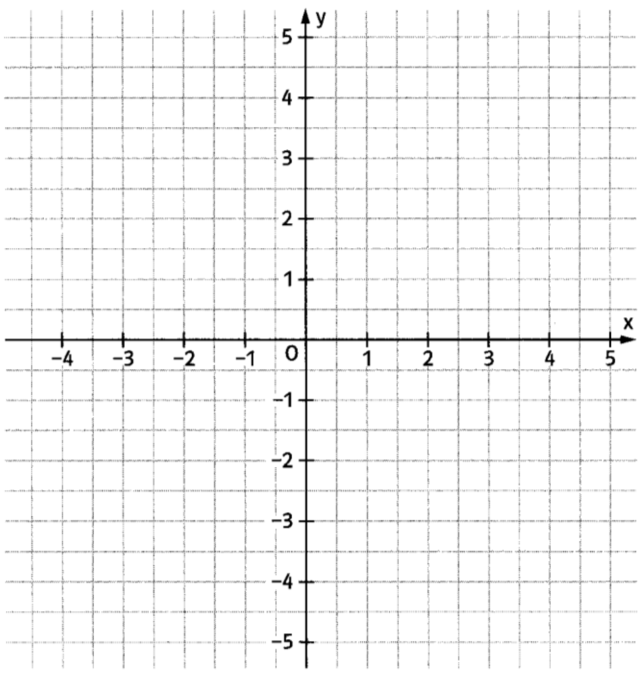


Graph C → __________



Graph D → __________

Graphen der Funktionen ____________________:



2 Für die Funktion f gilt: $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$. Wie verhalten sich die Funktionswerte der Funktion g für $x \to \pm\infty$?

a) $g(x) = f(x) - 10000$ b) $g(x) = f(x + 200)$ c) $g(x) = -5 \cdot f(x)$ d) $g(x) = f(x) : 9$

$g(x) \to$ ____ für $x \to +\infty$ $g(x) \to$ ____ für $x \to +\infty$ $g(x) \to$ ____ für $x \to +\infty$ $g(x) \to$ ____ für $x \to +\infty$

$g(x) \to$ ____ für $x \to -\infty$ $g(x) \to$ ____ für $x \to -\infty$ $g(x) \to$ ____ für $x \to -\infty$ $g(x) \to$ ____ für $x \to -\infty$

3 Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen f, g und h mit $f(x) = 0,5x^3 + 1$; $g(x) = 2 - 3x - x^2$; $h(x) = 5$. Entscheide, ob es sich bei der folgenden Funktion k um eine ganzrationale Funktion handelt. Gib gegebenenfalls ihren Funktionsterm und ihren Grad an.

a) $k(x) = f(x) + g(x)$ b) $k(x) = f(x) - g(x)$ c) $k(x) = f(x) \cdot g(x)$

k(x) = ______________________ k(x) = ______________________ k(x) = ______________________

Grad: __________ Grad: __________ Grad: __________

d) $k(x) = f(x) : g(x)$ e) $k(x) = f(x) \cdot h(x)$ f) $k(x) = g(x) : h(x)$

k(x) = ______________________ k(x) = ______________________ k(x) = ______________________

Grad: __________ Grad: __________ Grad: __________

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

4 Gib den Term einer ganzrationalen Funktion f mit möglichst geringem Grad an, die die folgenden Nullstellen besitzt.

a) $-6; 0$ b) $-4; 0; 4$ c) $-\frac{1}{4}; 0; \frac{3}{5}; 2{,}7$

f(x) = ______ f(x) = ______ f(x) = ______

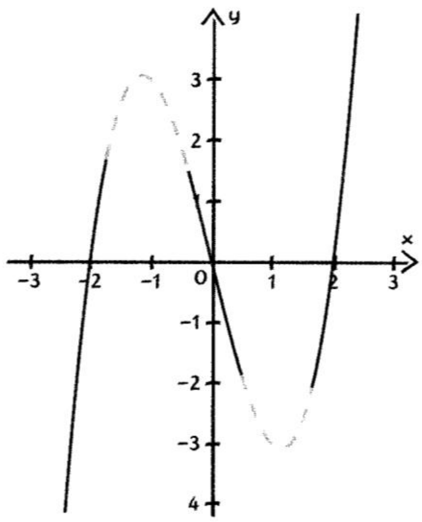
5 Die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2$ verhält sich für x nahe 0 wie eine gestreckte Parabel (Streckfaktor 4), die durch den Punkt $P(0\,|\,-2)$ geht. Bestimme das Verhalten der folgenden Funktionen für x nahe 0.

a) $f(x) = -5x^3 - 12x^2 - 3x + 1$ b) $f(x) = -3x^5 + 0{,}75x^4 + 0{,}5x^2$ c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x^4 + 5 + \frac{2}{5}x^3$

f(x) verhält sich für x nahe 0 wie ______ . f(x) verhält sich für x nahe 0 wie ______ . f(x) verhält sich für x nahe 0 wie ______ .

6 Mithilfe der Symmetrieeigenschaften einer Funktion f, ihren Nullstellen und ihrem Verhalten für $x \to \pm\infty$ sowie für x nahe 0 lässt sich oft bereits eine relativ gute Skizze des Graphen von f anfertigen.

a) Erläutere ausführlich, wie die Skizze der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 4x$ zustande gekommen ist.



______

b) Bestimme für die Funktionen f und g die Symmetrieeigenschaften, die Nullstellen, ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ sowie für x nahe 0 und skizziere anschließend die Graphen von f und g. Beschrifte außerdem die Koordinatenachsen sinnvoll.

$f(x) = 8x - 8x^2$

Symmetrie: ______ Nullstellen: ______

$f(x) \to$ ______ für $x \to +\infty$ $f(x) \to$ ______ für $x \to -\infty$

x nahe 0: ______

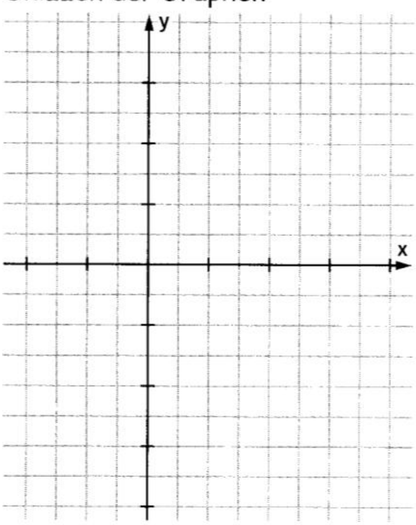
$g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

Symmetrie: ______ Nullstellen: ______

$g(x) \to$ ______ für $x \to +\infty$ $g(x) \to$ ______ für $x \to -\infty$

x nahe 0: ______

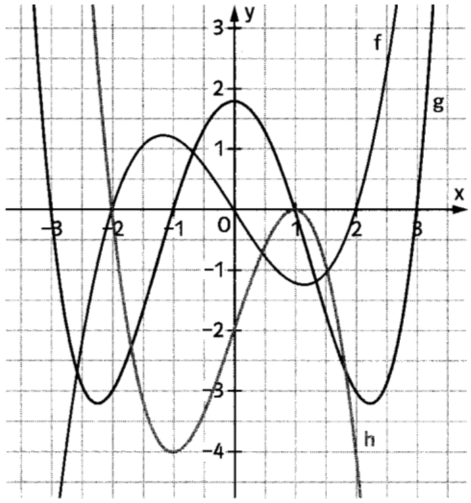
Skizzen der Graphen:



Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

7 Die Graphen der Funktionen f, g und h sind gegeben.
Gib an, welche der folgenden Aussagen auf welche der drei Funktionen zutreffen.

a) Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.
b) Im Funktionsterm ist die Zahl vor der höchsten Potenz positiv.
c) Der Graph ist symmetrisch zum Ursprung.
d) Der Grad der Funktion ist ungerade.
e) Der Grad der Funktion ist mindestens 4.
f) Im Funktionsterm gibt es keinen Summanden ohne x-Potenz.



a) ____________ b) ____________ c) ____________

d) ____________ e) ____________ f) ____________

8 Gegeben ist eine achsensymmetrische Funktion f mit $f(x) = x^4 - x^2$ und eine Funktion g, deren Graph durch Verschiebung des Graphen von f um drei Einheiten nach rechts hervorgeht. Der Graph von g muss also achsensymmetrisch zur Achse $x = 3$ sein.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von g.

$g(x) =$ ______________________________

b) Zeige, dass gilt: $g(3 + x) = g(3 - x)$. Benutze hierzu die Voraussetzung, dass $f(x) = f(-x)$ gilt, da der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

b) ______________________________

____

____

____

____

____

9 **Nullstellen mit Polynomdivision bestimmen**

a) Bestimme die Nullstellen von f mithilfe der Polynomdivision.

i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Nullstellen: ______________________________

ii) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 7x - 18$

Nullstellen: ______________________________

iii) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 22x - 56$

Nullstellen: ______________________________

iv) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 18$

Nullstellen: ______________________________

v) $f(x) = 25x^3 - 75x^2 + 54x - 8$

Nullstellen: ______________________________

vi) $f(x) = x^3 - 10x^2 + 29x - 20$

Nullstellen: ______________________________

vii) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$

Nullstellen: ______________________________

viii) $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

Nullstellen: ______________________________

b) Lasse findet durch Ausprobieren die Nullstelle −2 der Funktion f und bestimmt die restlichen Nullstellen mithilfe der Polynomdivision. Lasse macht aber einige Fehler. Finde und korrigiere sie.

$f(x) = 4x^3 - 13x + 6$; 1. Nullstelle $x_1 = -2$

Also

$(4x^3 - 13x + 6) : (x + 2) = 4x^2 + 8x + 3$

$\underline{-(4x^3 + 8x^2)}$

$8x^2 - 13x + 6$

$\underline{-(8x^2 - 16x)}$

$3x + 6$

$\underline{-(3x + 6)}$

0

Jetzt muss die Gleichung

$4x^2 + 8x + 3 = 0$ mit der pq-Formel gelöst werden:

$4x^2 + 8x + 3 = 0 \quad | : 4$

$x^2 + 2x + 3 = 0 \quad p = 2; q = 3$

$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3}$

$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2$

$x_2 = -1; \ x_3 = 3$

Richtige Lösung: $x_1 =$ ____, $x_2 =$ ____ und $x_3 =$ ____

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

10 Es startet ein Skilift zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Talstation auf 800 m über dem Meeresspiegel. Die Bergstation ist nach 4 Minuten und 40 Sekunden erreicht. Die Funktion h mit $h(t) = -8t^3 + 60t^2 + 52t + 800$ gibt an, in welcher Höhe sich die Gondel zum Zeitpunkt t befindet (t in Minuten, h in m über dem Meeresspiegel).

a) In welcher Höhe befindet sich die Bergstation?

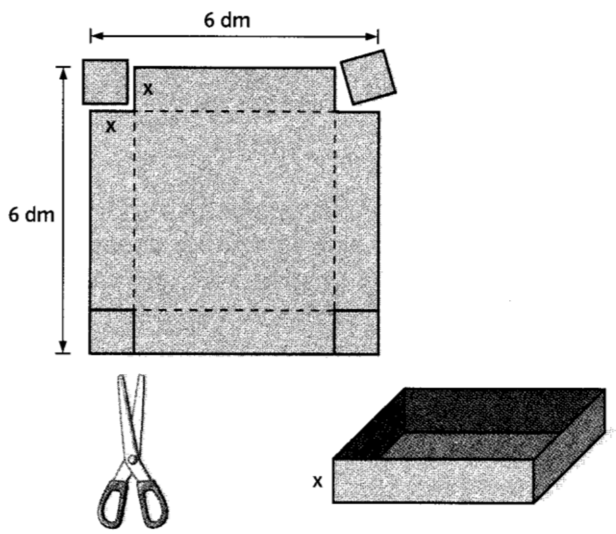
Antwort: ____________________

b) Wann durchbricht die Gondel die 1500-m-Grenze ungefähr?

Antwort: ____________________

11 Aus einem quadratischen Stück Pappe soll eine offene Schachtel gebastelt werden, so wie im Bild rechts gezeigt. Das Volumen der Schachtel ist von der Länge der Seite x der Quadrate, die aus den vier Ecken herausgeschnitten werden, abhängig.

a) Zeige, dass das Volumen der Schachtel je nach Seitenlänge x beschrieben werden kann durch die ganzrationale Funktion V mit $V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$.



____

____

____

____

____

b) Gib einen im Kontext sinnvollen Definitionsbereich der Funktion V an. Wie kommt man rechnerisch auf die Grenzen des Defintionsbereiches?

D: ______ < x < ______. Die Grenzen des Definitionsbereiches sind die ____________________ von V.

12 Ruben hat regelmäßig Kopfschmerzen und nimmt dagegen Schmerztabletten ein. Im Internet hat er gelesen, dass die Konzentration c des Wirkstoffes im Blut zunächst steigt und nach einer bestimmten Zeit wieder abgebaut wird und dass dieser Prozess näherungsweise durch die Funktion c mit $c(t) = t^3 - 17t^2 + 63t + 81$ (t ist die Zeit in Stunden seit der Einnahme; c die Konzentration des Wirkstoffes im Blut in µg/ml) beschrieben werden kann.

a) Wie hoch ist die Konzentration des Wirkstoffes im Blut dreieinhalb Stunden nach der Einnahme?

Antwort: ____________________.

b) Bestimme die Nullstellen der Funktion c. Welche Bedeutung haben sie im Sachzusammenhang?

Nullstellen: ______________; Bedeutung: ____________________

____

c) Nach welcher Zeit ist die Wirkstoffkonzentration im Blut wieder auf den Anfangswert direkt nach der Einnahme gesunken?

Antwort: ____________________

____________________.

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M5 – Ganzrationale Fkt - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

13 Eine Elektrofirma stellt Digitalkameras her. Die Funktion f mit $f(t) = -\frac{1}{2700}t^3 + \frac{40}{225}t^2 - \frac{20}{3}t + 1280$ beschreibt näherungsweise die täglich verkauften Kameras im Verlauf eines Jahres, wobei t die Anzahl der Tage seit dem 1. Januar ist, also für t = 0 gilt, dass dies der 1. Januar ist. Die Monatslänge wird konstant mit 30 Tagen gerechnet.

a) Wie viele Digitalkameras wurden am 1. Januar und wie viele am 1. September des Jahres verkauft?

Antwort: ____.

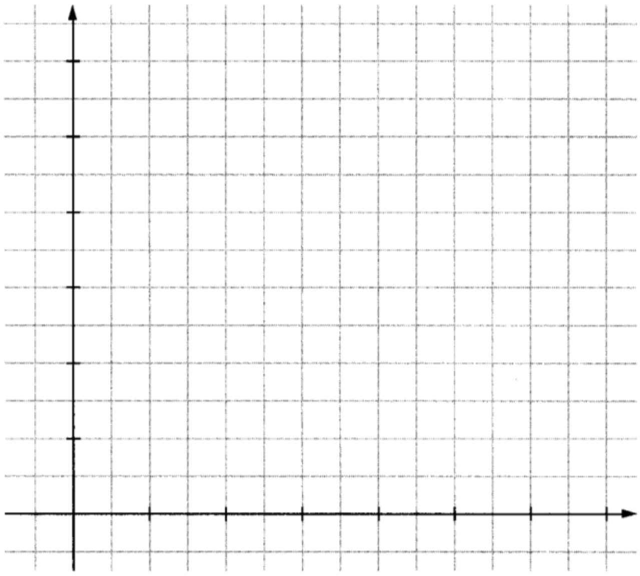
b) Am 1. November (t = 300) wurden die meisten Kameras, nämlich 5280 Stück, verkauft, am 21. Januar (t = 20) die wenigsten (1214). Skizziere den Graphen von f für das gesamte Jahr. Beschrifte die Achsen sinnvoll.

c) Lies aus dem Graphen ab, in welchem Zeitraum etwas mehr als 5000 Kameras pro Tag verkauft wurden.

Gesuchter Zeitraum: ____________________

d) Zwischen dem 1. Mai und dem 1. Juli ist die tägliche Zunahme der verkauften Kameras pro Tag ungefähr konstant. Wie viele Kameras wurden in diesen zwei Monaten etwa insgesamt verkauft?

Verkaufte Kameras von 1. Mai – 1. Juli: __________



14 In den kugelförmigen Behälter einer Industriefabrik wird eine Flüssigkeit gefüllt und nach einiger Zeit wieder herausgelassen. Für die Zulaufgeschwindigkeit v gilt näherungsweise $v(t) = 4t^3 - 30t^2 + 48t$ (t in Stunden; v(t) in m^3/h).

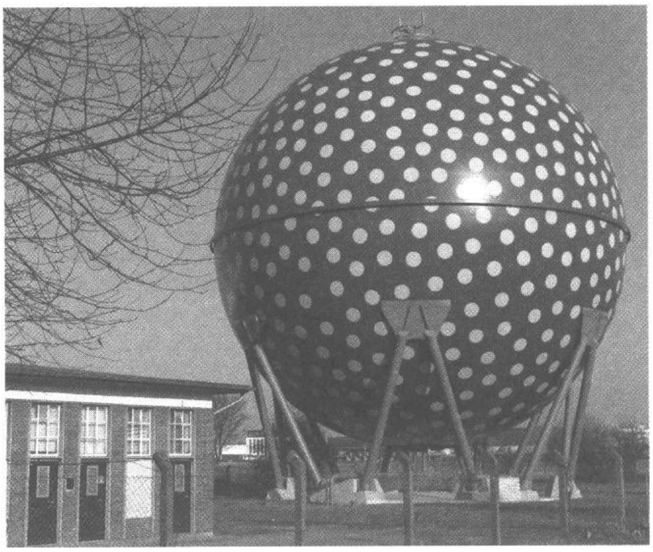
a) In welchem Zeitraum nach Messbeginn ist die Zulaufgeschwindigkeit positiv, in welchem negativ? Was bedeutet eine negative Zulaufgeschwindigkeit?

Positive Zulaufgeschwindigkeit: ______________

Negative Zulaufgeschwindigkeit: ______________

Bedeutung der negativen Zulaufgeschwindigkeit:

____



____

b) Wieso beschreibt die Funktion v die Zulaufgeschwindigkeit nur etwa in den ersten 5 Stunden nach Messbeginn sinnvoll und warum kann man mithilfe von v keine sinnvolle Aussage über die Zulaufgeschwindigkeit nach z. B. 11 Stunden machen?

Antwort: ____

____

c) Bestimme den Zeitraum, in dem die Abflussgeschwindigkeit größer als $18\,m^3/h$ ist.

Gesuchter Zeitraum: ____

Viel Erfolg