Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M6 – Veränderungen/Abl - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

Vertiefende Aufgaben entsprechen nicht dem Muster der Test- und Standardaufgaben, sie erfordern meist einen neuen Lösungsansatz.

1 Die Ableitung der Ableitungsfunktion f′ nennt man „zweite Ableitung" und schreibt: f″. Die Ableitung von f″ wird als „dritte Ableitung" bezeichnet und man schreibt: f‴. Bestimme $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$.

a) $f(x) = -3x^6 - 0{,}25x^4 - \frac{5}{6}x^3 + 2$

$f'(x) =$ ____________________

$f''(x) =$ ____________________

$f'''(x) =$ ____________________

b) $f_t(x) = 2t^4x^3 + 5x^2 - (t+1)x + 3t^4$

$f'_t(x) =$ ____________________

$f''_t(x) =$ ____________________

$f'''_t(x) =$ ____________________

c) $f(x) = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)(x^2 + 2)\left(x + \frac{1}{6}\right)$

$f'(x) =$ ____________________

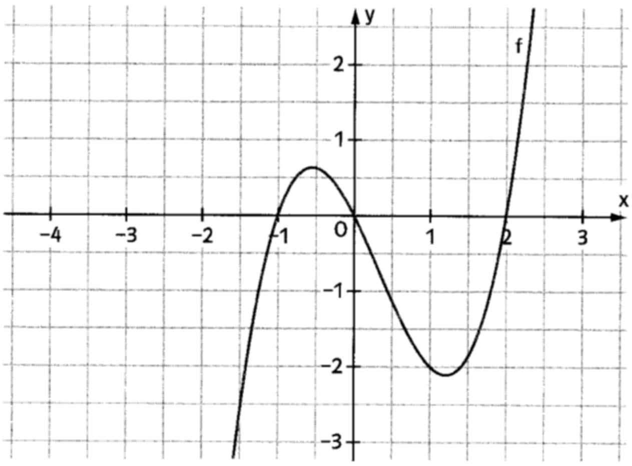
$f''(x) =$ ____________________

$f'''(x) =$ ____________________

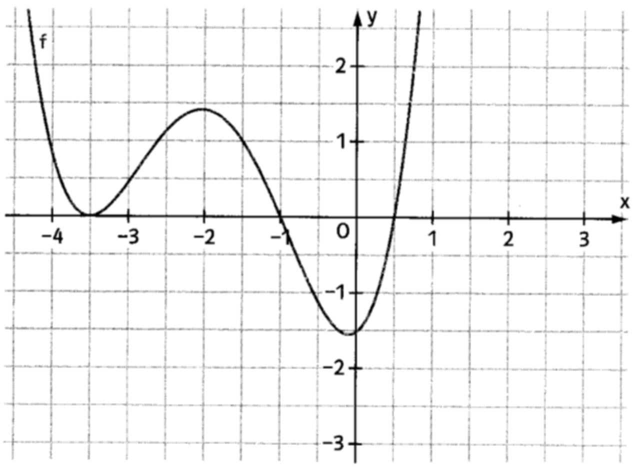
2 Gegeben ist der Graph der Funktion f.

a) Skizziere die Graphen der Funktionen f′ und f″ in dasselbe Koordinatensystem.

(1)



(2)



b) Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte und Wendepunkte sind sogenannte charakteristische Punkte eines Graphen. Markiere diese Punkte in den obigen Graphen der Funktion f. Markiere anschließend die Punkte auf den Graphen der Ableitungsfunktionen f′ und f″, die dieselbe x-Koordinate haben. Welche Zusammenhänge lassen sich entdecken? Vervollständige die folgenden Sätze:

1. An der Stelle x_0, an der der Graph von f einen Hochpunkt hat, besitzt der Graph von f′

______________________________ mit Vorzeichenwechsel von ________ nach ________.

2. An der Stelle x_0, an der der Graph von f einen Tiefpunkt hat, besitzt der Graph von f′ ______________

______________________________ mit Vorzeichenwechsel von ________ nach ________.

3. An der Stelle x_0, an der der Graph von f einen Wendepunkt hat, besitzt der Graph von f′ ____________

______________________________ und der Graph von f″ ________________________.

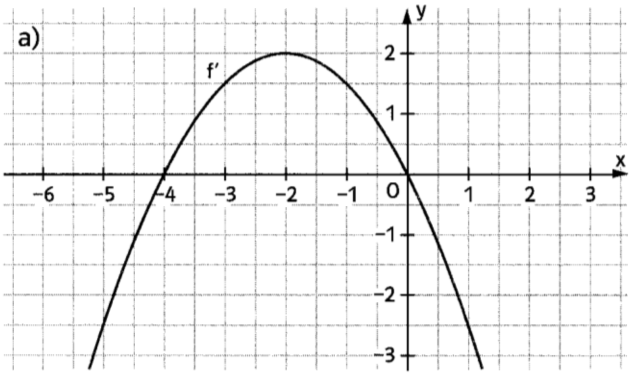
c) Die Funktion f aus Aufgabenteil a) (1) besitzt die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$. Bestimme mithilfe deiner Erkenntnisse aus b) rechnerisch den Hoch-, den Tief- und den Wendepunkt und überprüfe deine Ergebnisse am Graphen.

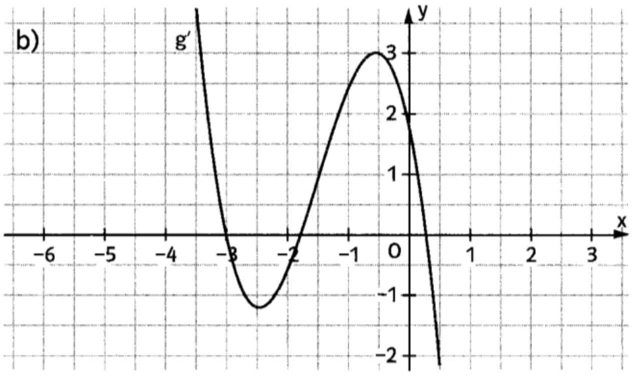
Rechnerisch: Hochpunkt (______ | ______); Tiefpunkt (______ | ______); Wendepunkt (______ | ______)

Abgelesen: Hochpunkt (______ | ______); Tiefpunkt (______ | ______); Wendepunkt (______ | ______)

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M6 – Veränderungen/Abl - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

3 Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion f′ bzw. g′. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?





Aussagen zu dem Graphen von f′ aus a):

(1) Für $x > 0$ ist f monoton abnehmend. ☐ Wahr ☐ Falsch

(2) Der Graph von f″ ist eine Gerade. ☐ Wahr ☐ Falsch

(3) An der Stelle $x_0 = -2$ ist die Steigung des Graphen von f maximal. ☐ Wahr ☐ Falsch

(4) An der Stelle $x_0 = 0$ besitzt der Graph von f″ eine Nullstelle. ☐ Wahr ☐ Falsch

(5) An der Stelle $x_0 = -4$ besitzt der Graph von f einen Hochpunkt. ☐ Wahr ☐ Falsch

Aussagen zu dem Graphen von g ′ aus b):

(1) Für $-2 < x < -1$ ist g monoton zunehmend. ☐ Wahr ☐ Falsch

(2) Der Graph von g ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse. ☐ Wahr ☐ Falsch

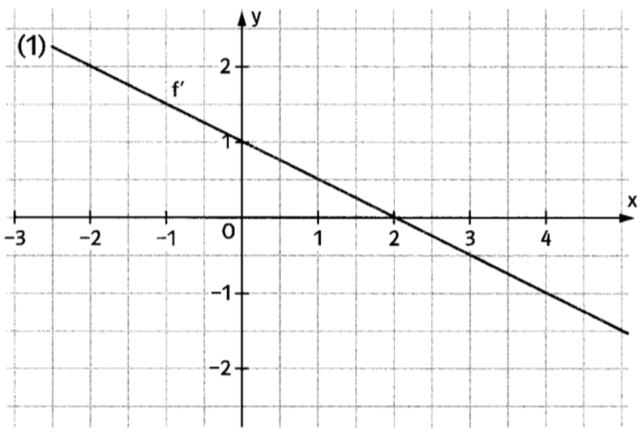
(3) Der Graph von g besitzt genau vier Nullstellen. ☐ Wahr ☐ Falsch

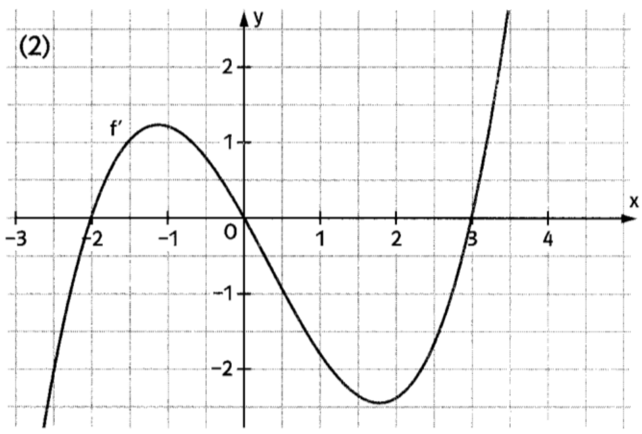
(4) Der Graph von g″ besitzt genau zwei Nullstellen. ☐ Wahr ☐ Falsch

(5) Für $-1{,}5 < x < 0{,}5$ ist g″ monoton abnehmend. ☐ Wahr ☐ Falsch

4 Gegeben ist der Graph der Funktion f′.

a) Skizziere einen möglichen Graphen der Funktion f in dasselbe Koordinatensystem.





b) Vergleiche deine Lösung mit der deines Nachbarn. Warum gibt es unendlich viele richtige Lösungen für den Graphen von f?

Antwort: ____

____

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M6 – Veränderungen/Abl - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

5 Die Normale n ist eine Gerade, die senkrecht zur Tangente t steht. Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normale an den Graphen von f in P.

a) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$; $P(-2\,|\,f(-2))$

$t(x) =$ ____________________

$n(x) =$ ____________________

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^2$; $P(2\,|\,f(2))$

$t(x) =$ ____________________

$n(x) =$ ____________________

c) $f(x) = 8x - \frac{2}{3}x^3$; $P\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

$t(x) =$ ____________________

$n(x) =$ ____________________

6 Gegeben sind f und g mit $f(x) = \frac{2}{9}x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)$ und $g(x) = \frac{1}{18}x(36 - x^2)$.

a) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von f und g.

S_1(____ | ____); S_2(____ | ____); S_3(____ | ____)

b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten durch den Schnittpunkt, der den größten x-Wert besitzt.

$t_f(x) =$ ______________; $t_g(x) =$ ______________

c) Bestimme die Gleichungen der Tangenten durch den Schnittpunkt, der den kleinsten x-Wert besitzt ohne Rechnung. Welche Eigenschaft der Graphen von f und g lässt sich hier ausnutzen?

$t_f(x) =$ ______________; $t_g(x) =$ ______________

Eigenschaft: ______________________________

d) Bestimme den Schnittwinkel zwischen den Tangenten aus b). Ist der Schnittwinkel zwischen den Tangenten aus c) identisch? Begründe.

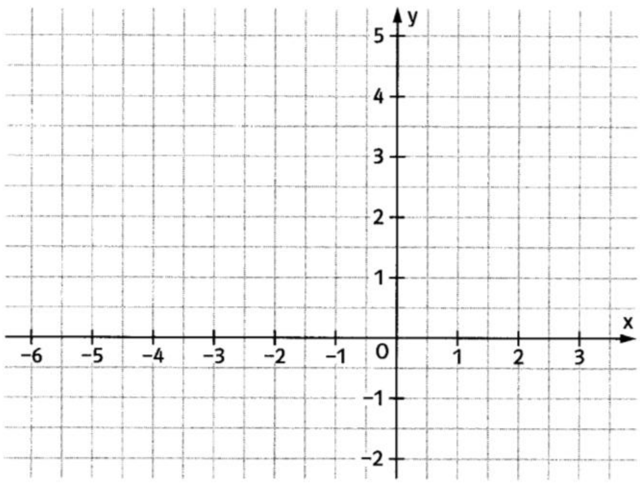
Schnittwinkel α = ______; Ja/Nein, denn ______

____

____

7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + cx$, wobei c eine beliebige reelle Zahl ist. Der Graph von f schneidet die x-Achse in $O(0\,|\,0)$ und $A(a\,|\,0)$. Die Tangenten an den Graphen von f in O und A schneiden sich im Punkt B.

a) Skizziere den Graphen von f für c = 1 in das untere Koordinatensystem.



b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten in O und A für c = 1.

$t_O(x) =$ ______________; $t_A(x) =$ ______________

c) Bestimme den Schnittpunkt B der beiden Tangenten aus b).

Schnittpunkt: S(____ | ____)

d) Zeige, dass das Dreieck OAB für jedes c ein gleichschenkliges Dreieck ist.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

e) Bestimme c so, dass das Dreieck OAB auch rechtwinklig ist.

c = ______

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M6 – Veränderungen/Abl - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

8 Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 1$.

a) Untersuche f auf Symmetrieeigenschaften.

Der Graph von f ist ______________________

b) Bestimme die Nullstellen der Funktion f.

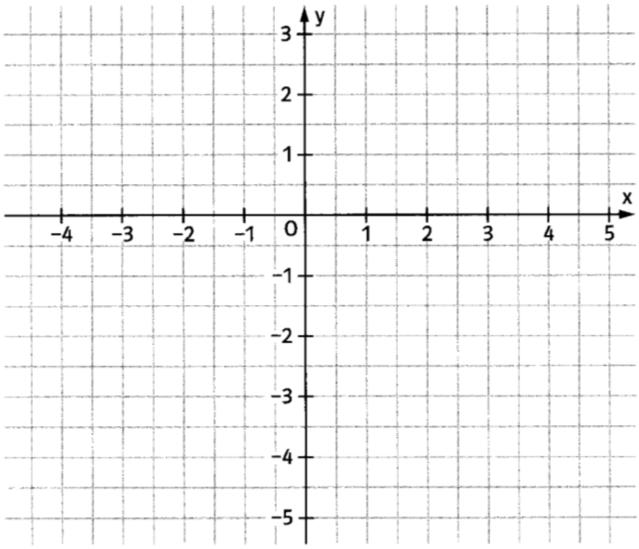
Nullstellen von f: ______________________

c) Gib die Funktionsterme von f′ und f″ an.

$f'(x)$ = ______________________

$f''(x)$ = ______________________

d) Bestimme die Stellen x_0 des Graphen von f, an denen die Ableitung f′ null wird, es also gilt: $f'(x_0) = 0$. Untersuche diese Stellen auf einen Vorzeichenwechsel.



Nullstellen von f' mit Vorzeichenwechsel: ______________________

e) Berechne die y-Werte zu den Stellen aus d), trage alle bisher errechneten Punkte in das obige Koordinatensystem ein und skizziere den Graphen von f.

y-Werte: y_1 = ______; y_2 = ______; y_3 = ______; bzw. P_1(____ | ____); P_2(____ | ____); P_3(____ | ____).

f) Die Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 0{,}5$ und die Normale n an dieser Stelle schließen mit der y-Achse eine Fläche ein. Skizziere die gesuchte Fläche im obigen Koordinatensystem und berechne ihren Inhalt.

t(x) = ____________; n(x) = ________________; Flächeninhalt A = ______________________

9 **Ableitungen mithilfe des Differenzenquotienten für h → 0 bestimmen**

Falls der Grenzwert des sogenannten Differenzenquotienten $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ für h → 0 existiert, dann heißt dieser Ableitung von f an der Stelle x_0.

a) Bestimme die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x$ an der Stelle $x_0 = -3$, 1 bzw. 5 mithilfe des Differenzenquotienten für h → 0. Gib zunächst den Ausgangsterm für den Differenzenquotienten an.

Differenzenquotient für $x_0 = -3$: ______________________ $f'(-3)$ = ____________

____

Differenzenquotient für $x_0 = 1$: ______________________ $f'(1)$ = ____________

____

Differenzenquotient für $x_0 = 5$: ______________________ $f'(5)$ = ____________

____

b) Bestimme die Ableitungsfunktion f′ von f mithilfe des Differenzenquotienten für h → 0. Gib zuvor den Ausgangsterm sowie den vereinfachten Term für den Differenzenquotienten an.

Differenzenquotient: ______________________ $f'(x_0)$ = ____________

c) Bestimme die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen mithilfe des Differenzenquotienten für h → 0.

(1) $f(x) = -4x^2 + \frac{2}{3}x - 1$ $f'(x_0)$ = ____________ (2) $f(x) = \frac{7}{9}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 6x$ $f'(x_0)$ = ____________

Ma Jg: Ab: Vertiefungsfach Mathe Sj:

Name: **M6 – Veränderungen/Abl - Vertiefende Aufgaben** Datum:

10 Mathilda und Emmi machen eine Radtour durch die Berge. Kurz nach Beginn der Radtour lässt sich die zurückgelegte Strecke in km näherungsweise durch die Funktion s mit $s(t) = (t-3)^3 + 27$ beschreiben, wobei t für die Stunden seit Messbeginn steht ($0 \leqq t \leqq 5$). Der Graph von s ist in Fig. 1 abgebildet.

a) Zu welchem Zeitpunkt t seit Messbeginn sind Mathilda und Emmi dem Graphen nach zu urteilen am schnellsten, zu welchem am langsamsten gefahren?

Am schnellsten: ______________ Am langsamsten: ______________

b) Wie schnell fahren Mathilda und Emmi in den ersten fünf Stunden seit Messbeginn durchschnittlich?

Durchschnittliche Geschwindigkeit: ______________

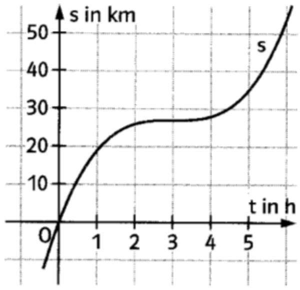


Fig. 1

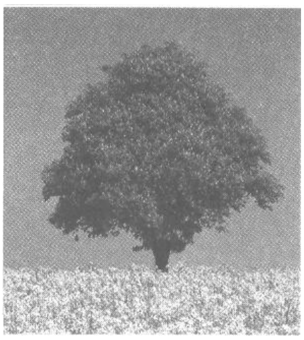
c) Wie schnell fahren Mathilda und Emmi eineinhalb Stunden nach Messbeginn?

Geschwindigkeit nach 1,5 Stunden: ______________

d) Wann beträgt die Geschwindigkeit der beiden genau 20 km/h? Stelle hierfür zunächst eine entsprechende Gleichung auf.

Ausgangsgleichung: ______________ Antwort: ______________

____



11 Bäume geben aufgrund der Fotosynthese Sauerstoff an ihre Umgebung ab. Die abgegebene Sauerstoffmenge hängt von der Tageszeit bzw. vom Licht ab. Die Funktion V mit $V(t) = -1{,}2t^3 + 24t^2 + 10t$ ($V(t)$ in l; t in h) gibt näherungsweise die Gesamtsauerstoffmenge in Litern an, die ein Baum im Laufe eines Tages nach dem Sonnenaufgang ($t = 0$) abgibt.

a) Bestimme $V'(4)$. Welche Bedeutung hat $V'(4)$ im Sachzusammenhang?

$V'(4) =$ ______________ Bedeutung im Sachzusammenhang: ______________

____

____

b) Bestimme den Zeitpunkt t_0, für den die Ableitung der Funktion V null ist. Interpretiere den Punkt $P(t_0 | V(t_0))$ im Sachzusammenhang. Schränke den Definitionsbereich der Funktion V sinnvoll ein.

Zeitpunkt: ______________ Interpretation im Sachzusammenhang: ______________

____

____

______________ Definitionsbereich von V: ________ $<$ x $<$ ________.

c) Bestimme näherungsweise den Zeitpunkt, an dem die Sauerstoffproduktionsgeschwindigkeit des Baumes am größten ist. Wie lässt sich das Ergebnis im Sachzusammenhang begründen? Wie groß ist die Sauerstoffmenge insgesamt an diesem Tag zu diesem Zeitpunkt?

Zeitpunkt: ______________ Begründung im Sachzusammenhang: ______________

____

____

______________ Sauerstoffmenge: ______________

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M6 – Veränderungen/Abl - Vertiefende Aufgaben**	Datum:

12 Ein Gartenteich ändert seinen Wasserstand im Sommer fortwährend aufgrund von Hitze und Regenfällen. Das Wasservolumen im Teich kann näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion V mit $V(t) = 3t^3 - 12t^2 + 11{,}25t + 6$ (V ist das Volumen in km^3, t die Zeit in Tagen, $0 < t < 3$).

a) Lies am Graphen die ungefähren Zeiträume ab, in denen es wahrscheinlich geregnet hat.

Zeiträume: ______________________________

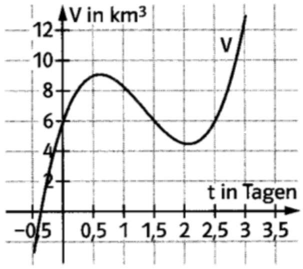
b) Wann ist die Zulaufgeschwindigkeit im betrachteten Zeitintervall am größten? Begründe rechnerisch.

Zeitpunkt: ______________ Begründung: ______________________________

____

____

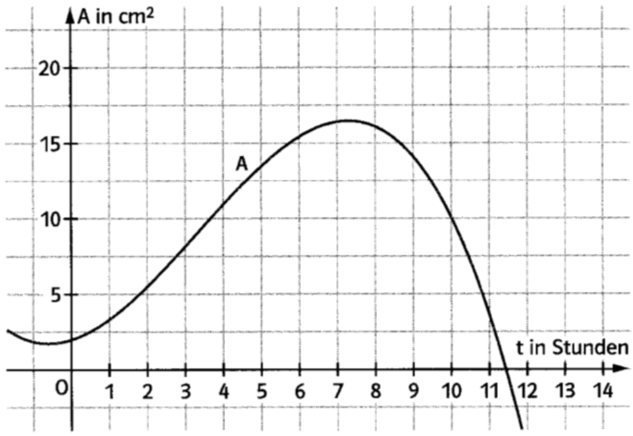
____



c) Bestimme die Zeitpunkte, in denen die Ablaufgeschwindigkeit $-1{,}5\,km^3$ pro Tag beträgt.

Zeitpunkte: ______________________________

13 In einer Petrischale wird eine Bakterienkultur beobachtet, die sich zunächst vermehrt und nach einigen Stunden aufgrund eines äußeren Einflusses abstirbt. Die Funktion A mit $A(t) = -0{,}06t^3 + 0{,}6t^2 + 0{,}8t + 2$ beschreibt näherungsweise das Wachstum dieser Bakterienkultur, wobei A(t) die mit Bakterien bedeckte Oberfläche der Petrischale angibt und t die Zeit in Stunden nach Versuchsbeginn ist.



a) Wie viele cm^2 Fläche der Petrischale sind nach fünf Stunden von Bakterien bedeckt?

Fläche: ______________________________

b) Wie schnell wachsen die Bakterien durchschnittlich in den ersten sechs Stunden des Beobachtungszeitraumes?

Antwort: ______________________________

c) Nach welcher Zeit beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterien $1\,cm^2$ pro Stunde?

Antwort: ______________________________

d) Wie bestimmt man rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem keine Bakterien mehr in der Petrischale sind? Erläutere kurz das Verfahren ohne zu rechnen.

Antwort: ______________________________

____

e) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem sich die Bakterien am schnellsten vermehren. Wie viel cm^2 Fläche der Petrischale sind zu diesem Zeitpunkt bedeckt?

Zeitpunkt: ______________ Bedeckte Fläche zu diesem Zeitpunkt: ______________

Viel Erfolg